

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
- ETAPA LOCALĂ -
08.02.2026
CLASA a X- a

- **Minden feladat kötelező. Hivatalból 10 pont jár.**
- **A versenylapra a teljes megoldást írtátok le.**
- **A munkaidő három óra.**

I Tétel (20 pont)

Igazold a következő kijelentéseket:

- a) $\log_2 5 + \log_5 2 > \log_2 5 \cdot \log_5 4$;
- b) $(\log_6 12 - \log_{12} 24)^{-1} \in (8; 10)$.

II Tétel (20 pont)

Igazold, hogy bármely $n \geq 3$ természetes szám esetén és $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$

$$[a_1] = [a_2] = \dots = [a_n] = 4.$$

Igazold, hogy:

$$\log_{a_1}(9a_2 - 20) + \log_{a_2}(9a_3 - 20) + \dots + \log_{a_n}(9a_1 - 20) \geq 2n.$$

III Tétel (25 pont)

Határozd meg azokat az $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ függvényeket, amelyek bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén, rendelkeznek a következő tulajdonsággal

$$f(f(n+1)) = f(f(n) + 1) = n + 4053$$

IV Tétel (25 pont)

Adottak $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ úgy, hogy $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1, z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$ és $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$. Igazold, hogy

$$|z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - 3z_1z_2z_3| = 4$$